Введение (множества, действительные числа).

Тлеулесова А.М.

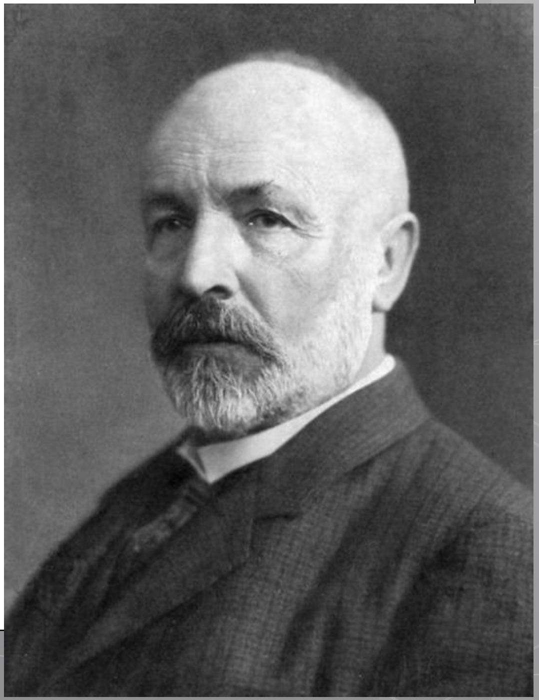
1. Основные понятия теории множеств, операции над ними и логическая символика.
2. Бином Ньютона.
3. Метод математической индукции.
4. Абсолютная величина и её основные свойства.
5. Отображения.
6. Мощность множества.
7.Числовые множества.

Множество

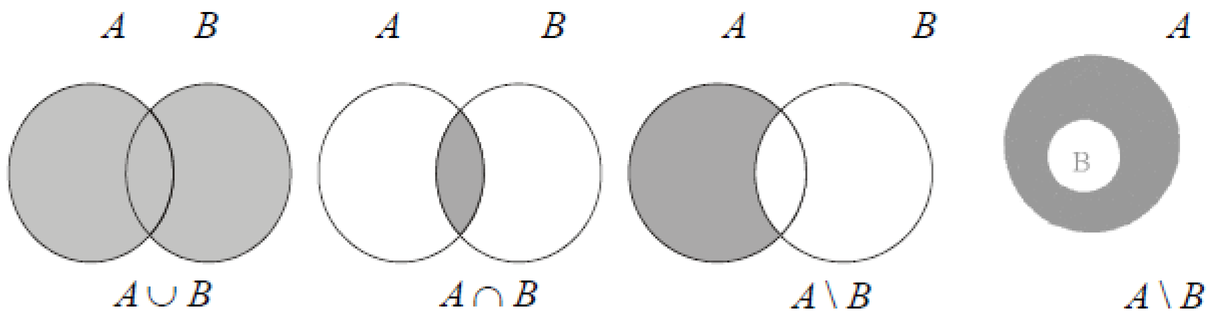
- \- совокупность (собрание) однородных объектов (элементов множества).
- Каждое отдельное множество задается правилом или законом, позволяющим судить относительно любого объекта принадлежит он данному множеству или нет.

Конечное Пустое Бесконечное

Бесконечное множество характеризуется тем, что после каждого извлечения любого элемента этого множества оно остается непустым



Георг Кантор (1845-1918, нем. математик)



$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

$$x \in A \bigcup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$$

$$x \in A \,\Delta\, B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \setminus B \\ x \in B \setminus A \end{array}\right.$$

$$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}.$$

Пример 1. Доказать равенство $(A \setminus B)' = A' \bigcup B.$

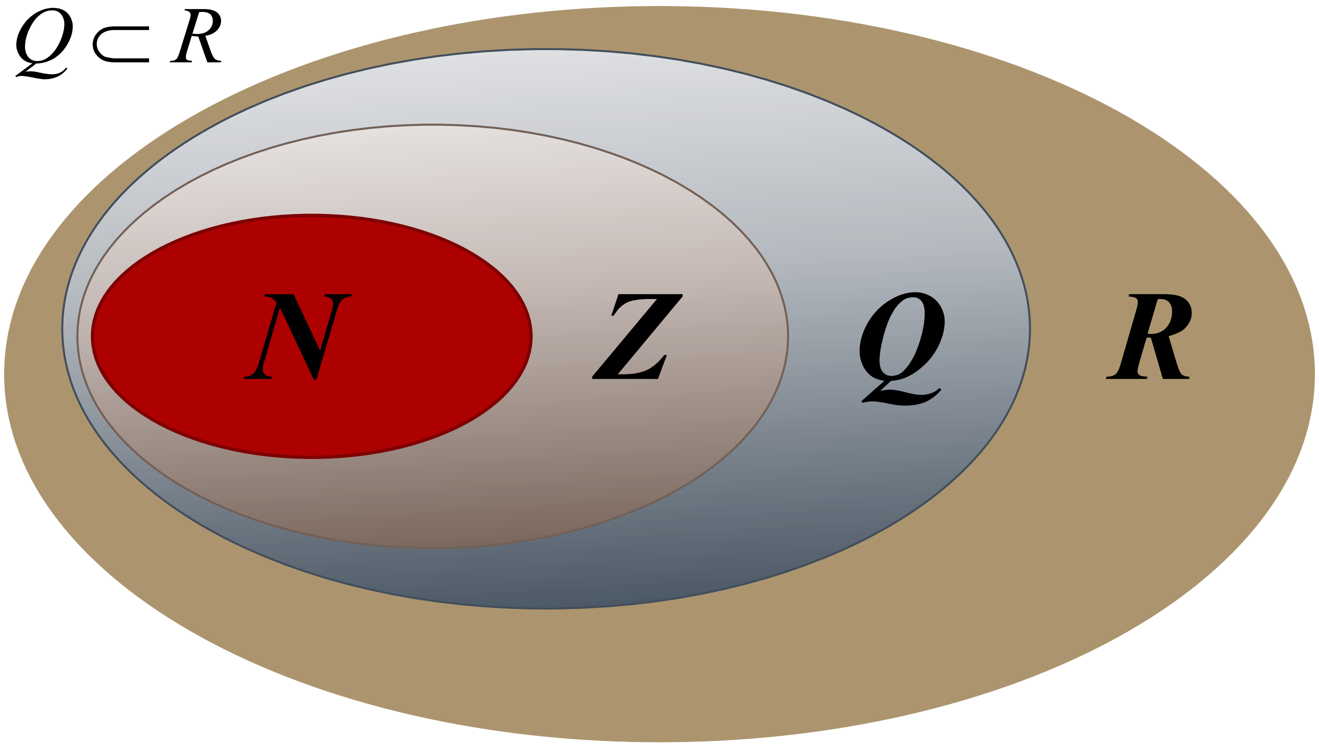
$$\blacktriangleright\ \forall x \in (A \setminus B)' \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S \\ x \notin A \setminus B \end{cases} \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S \\ \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in S \\ x \notin A \end{cases} \\ \begin{cases} x \in S \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A' \\ x \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A' \bigcup B \Leftrightarrow (A \setminus B)' \underset{\supset}{\subseteq} A' \bigcup B \Leftrightarrow (A \setminus B)' = A' \bigcup B\ \blacktriangleleft$$

Числовые множества

- Множества, элементами которых служат числа, называются **числовыми**.

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$



$$N = \{1,\ 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \qquad Z = N \cup N\_ \cup \{0\}$$

Свойства множества *R* (характерные):

- Упорядоченность

$$\forall a \in R,\ \forall b \in R,\ a \neq b \Rightarrow (a > b) \vee (a < b)$$

- Плотность

$$\forall a \in R,\ \forall b \in R,\ a \neq b\ \ \exists c \in R : a < c < b$$

- Непрерывность (полнота)

$$\forall A \subset R, \forall B \subset R, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A \cap B = \varnothing;$$

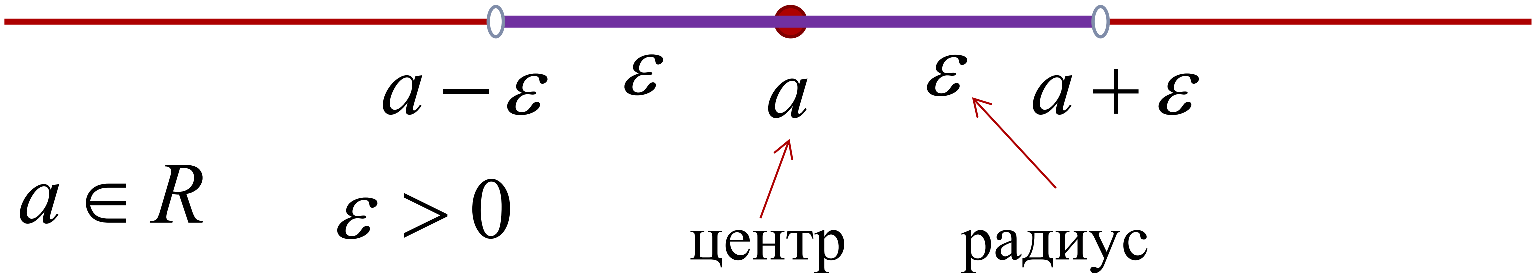
$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b\ \exists! c \in R : a \leq c \leq b.$$

Подмножества $\boldsymbol{R}$

- $[\,a, b\,] = \{x \in \boldsymbol{R}: a \le x \le b\}$ – отрезок или сегмент.
- $(a, b) = \,]\,\mathrm{a}, \mathrm{b}\,[\, = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}: \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$ – интервал или открытый отрезок.
- $(\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}: \mathrm{a} < \mathrm{x} \le \mathrm{b}\}$, $[\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}: \mathrm{a} \le \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$ – полуинтервалы, или полусегмент, полуоткрытый отрезок.
- Конечные числа *a, b* – граничные точки или концы промежутков.

- $[\,a, +\infty\,) = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}: \mathrm{a} \le \mathrm{x}\}$, $(-\infty, \mathrm{a}] = \{\mathrm{x} \in \mathbf{R}: \mathrm{x} \le \mathrm{a}\}$ – замкнутая полупрямая или замкнутый луч.
- $(\,a, +\infty\,)$, $(-\infty, a\,)$ – открытая полупрямая или открытый луч
- *a* – вершина луча (бесконечного полуинтервала)
- $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$ – числовая прямая

Окрестность точки



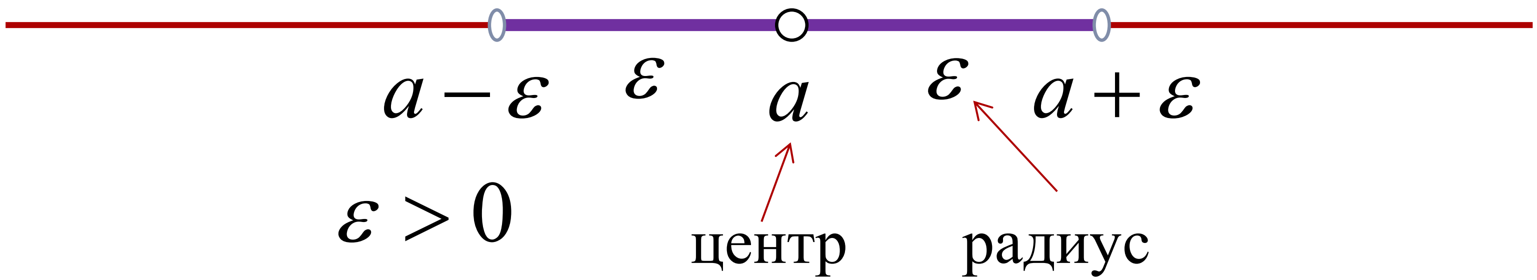
$a \in R$ $\varepsilon > 0$

- U(a, ε)=$(a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ )$=$\{x\ \in \boldsymbol{R}\!: |\ x-a\ | < \varepsilon\ \}$ – ε-окрестность точки a.

Любые две точки a и b имеют непересекающиеся окрестности.

Проколотая окрестность точки

$a \in R$



$\varepsilon > 0$

$\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

- $(a - \varepsilon\ ,\ a) \cup (a,\ a + \varepsilon) =$

$\{x \in \boldsymbol{R}\text{: } 0 < |\, x - a \,| < \varepsilon \}$ – проколотая ε-окрестность точки a.

Ограниченные числовые множества

- Множество X называется ***ограниченным сверху (снизу)***, если существует такое число $M(m)$, что для всех x из X выполняется неравенство $x \leq M$ ($x \geq m$).
- Числа $M(m)$ называются ***верхней гранью (нижней гранью)*** множества X.
- Если множество имеет верхнюю и нижнюю грани, оно называется ***ограниченным (ограниченным по модулю)***, т.е.

$$\forall x \in X \ \exists C \geq 0 : |x| \leq C$$

- В противном случае множество называется неограниченным.

Точные грани множества

- Пусть множество X ограниченно сверху. Наименьшая из всех его верхних граней называется ***точной верхней гранью*** или ***супремумом***.
- Supremum – самый верхний, наибольший

$$\sup X = M_0 \qquad \sup_{x \in X} x = M_0$$

- Число M_0 называют супремумом множества X, если:

1) $\forall x \in X \;\; x \leq M_0$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : x > M_0 - \varepsilon$

Точные грани множества

- Пусть множество X ограниченно снизу. Наибольшая из всех его нижних граней называется ***точной нижней гранью*** или ***инфимумом***.
- infimum – самый нижний, наинизшее, наименьший.

$$\inf X = m_0 \qquad \inf_{x\in X} x = m_0$$

- Число m_0 называют инфимумом множества X, если:

1) $\forall x \in X \;\; x \geq m_0;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : x < m_0 + \varepsilon$

Для неограниченных $\sup X = +\infty$, $\inf X = -\infty$.

Пример 4. Найти $\sup A$, $\inf A$, если $A=\left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Представим общий член a_n этого множества в виде: $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}=\dfrac{2n+2-3}{n+1}=2-\dfrac{3}{n+1}\underset{n\to\infty}{\uparrow}2$.

Теперь покажем, что $\sup A=2$, $\inf A=\dfrac{1}{2}=a_1$.

$\sup A=2$.

► 1)Покажем, что 2 – верхняя граница множества A, т.е. $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}\le 2\quad \forall n\in\mathrm{N}$.

В самом деле, $\dfrac{2n-1}{n+1}\le 2 \;\Rightarrow\; 2n-1\le 2n+2 \;\Rightarrow\; -1\le 2$ - верно.

2) Покажем, что 2 - наименьшая из верхних границ, т.е. $\forall d<2 \quad \exists a_{n_d}\in A:\quad a_{n_d}>d$:

$$a_n=\frac{2n-1}{n+1}>d \;\Rightarrow\; 2n-1>nd+d \;\Rightarrow\; n(2-d)>d+1 \Rightarrow n>\frac{d+1}{2-d},\text{ т.к. } 2-d>0;$$

$\Rightarrow$ например, $n_d=\left[\dfrac{d+1}{2-d}\right]+1$.◄

$\inf A=\dfrac{1}{2}$.